

УДК 519.63.001.57

DOI: 10.24028/gzh.0203-3100.v41i2.2019.164465

## Математичне моделювання нелінійних процесів витіснення у нафтовому LEF-пласті методами комплексного аналізу і сумарних зображень

*О. М. Гладка, 2019*

Національний університет водного господарства та природокористування,  
Рівне, Україна

Разработан подход к моделированию нелинейных процессов вытеснения (одно- и двухфазной фильтрации) в неоднородных нефтяных деформируемых пластах с учетом обратного влияния потенциала поля скорости и функции тока на проводимость среды. Построены методика и вычислительная технология решения соответствующих краевых задач для нелинейно-слоистых трехсвязных криволинейных областей, ограниченных эквипотенциальными линиями и линиями тока, на основе синтеза численных методов квазиконформных отображений и суммарных представлений для дифференциальных уравнений с разрывными коэффициентами в сочетании с декомпозицией области по методу Шварца. Квазиидеальные процессы в нелинейно двоякостойких горизонтальных LEF-пластах, геометрия зон неоднородности которых заранее неизвестна, описано соответствующими краевыми задачами, полученными на основе закона Дарси и уравнения неразрывности с коэффициентом проницаемости пласта, который задается кусочно-постоянной функцией с разрывами вдоль участков искомых эквипотенциалей и линий тока. Предложенные алгоритмы автоматически решают проблему выбора узлов и построения динамической сетки, нахождения неизвестных линий раздела участков постоянства коэффициента проводимости среды, расчета поля скорости и вычисления других характерных параметров процесса. Декомпозиция области по слоям постоянства коэффициента проницаемости позволяет решать задачи в более «удобных» подобластях, чем вся область исходной задачи, распараллеливанием вычислительного процесса, поскольку расчеты в подобластях на каждом итерационном шаге независимы друг от друга и могут выполняться параллельно с использованием современных компьютерных технологий.

**Ключевые слова:** нефтяной пласт, двоякостойкая среда, квазиконформные отображения, комплексный квазипотенциал, метод суммарных представлений, декомпозиция области, альтернирующий метод Шварца, LEF-пласт.

**Вступ.** На сьогодні, попри велику кількість наукових досліджень з питань математичного моделювання процесів фільтрації у пористих пластах (див., наприклад: [Сергиенко и др., 1991]), існує чимало проблем, що стосуються наукового обґрунтування заходів щодо підвищення якості проектування та ефективності розробки родовищ нафти та газу, встановлення особливостей перебігу нелінійних процесів витіснення речовини з урахуванням зворотного впливу параметрів процесу на присвердловинну зону пласта тощо, пов'язаних передусім з вибором математичних моделей, які б, з одного боку, адекватно і максимально точно враховували всі чинники реальних процесів, а з іншого — були б сприятливими для розв'язання і комп'ютерного моделювання.

Проблема розробки методики математичного опису складних фільтраційних процесів, зокрема, витіснення вуглеводнів із неоднорідних нафтогазових чи ущільнених (сланцевих) пластів, що зазнали деформацій під час експлуатації покладів, з метою подальшого дослідження цих процесів за допомогою комп'ютерного моделювання, поро-

джує необхідність побудови математичних моделей, які б враховували зворотний вплив характеристик процесу на фільтраційні властивості пористого середовища, нелінійність фільтрації, що пов'язана зі зміною потенціалу швидкості в окремих зонах пласта, зміни меж цих зон тощо.

Ефективним методом математичного моделювання таких процесів у криволінійних областях, обмежених лініями течії і еквіпотенціальними лініями, є розроблений А. Я. Бомбою і його учнями підхід на підставі комплексного аналізу з використанням методів квазіконформних відображень, що автоматизує побудову динамічних сіток, які є основою для розрахунків величини поля швидкості, розподілу тиску в пласті, фільтраційних витрат і перетоків між свердловинами, точок призупинки потоку, інших характеристик моделі [Бомба та ін., 2007; Бомба та ін., 2013а; Bomba et al., 2013]. Одним із шляхів підвищення ефективності цього підходу є використання як його компонентів числово-аналітичних методів сумарних зображень, розроблених Г. М. Положиєм, І. І. Ляшком, А. А. Глущенком та ін. [Polozhii, 1965; Ляшко, Великоиваненко, 1973], а також альтернувального методу Шварца декомпозиції області (див., напр., [Василевский, Ольшанский, 2007]).

В основу дослідження покладено ідею синтезу числових методів комплексного аналізу, сумарних зображень і декомпозиції області з метою математичного моделювання нелінійних квазіідеальних фільтраційних процесів у техногенно-деформованих пористих водонафтогазових LEF-пластах, межі зон неоднорідності яких визначаються шуканими лініями динамічної сітки.

У статті використано поняття LEF-пласта (LEF — абр. від Lines of Equipotential and Flow) — модельного об'єкта, що описує нелінійно-шаруваті структури, в яких параметром, котрий характеризує основні фільтраційні властивості середовища, є коефіцієнт проникності продуктивного пласта, представлений кусково-сталою функцією, що залежить від квазіпотенціалу (тиску) і функції течії; невідому геометрію зон визначають відповідними еквіпотенціальними лініями і лініями течії, які розраховують під час розв'язання задачі [Бомба та ін., 2016; Гладка, 2016].

У цій роботі розроблену автором методика розв'язання відповідних нелінійних крайових задач [Бомба та ін., 2012; Гладка, 2016; Hladka, Bomba, 2014] поширено на розв'язання нелінійних крайових задач для тризв'язних криволінійних LEF-областей, обмежених двома еквіпотенціалами і непроникним контуром, — математичних моделей стаціонарного процесу руху речовини у двоякошаруватих середовищах [Бомба та ін., 2014], провідність яких задано кусково-сталими функціями, залежними і від шуканого квазіпотенціалу, і від функції течії, з невідомими лініями розділу шарів (лініями розриву коефіцієнта провідності), що проходять уздовж ділянок шуканих еквіпотенціалів та ліній течії. Такі задачі виникають при моделюванні процесів витіснення (фільтрації), що породжені системою двох свердловин (нагнітальною та експлуатаційною) в елементі шарувато-неоднорідного нафтогазового пласта за геологічно складних умов. Розглянуто задачі: витіснення вуглеводнів із пласта, коли витіснювальна речовина і речовина, яку видобувають, мають однакові фізичні та механічні властивості; поршневого (повного) витіснення нафти водою; двофазної фільтрації (вода—нафта) за схемою Баклея—Лeverетта [Bomba, Yaroshchak, 2012], коли існує сумісний рух обох рідин.

**Випадок однакових рідин.** Розглянемо процес витіснення, породжений взаємодією нагнітальної та експлуатаційної свердловин в елементі двоякошаруватого нафтового LEF-пласта, де вважатимемо, що витіснювальна речовина і речовина, яку видобувають, мають однакові фізичні та механічні властивості. Математичне моделювання цього процесу зводиться до задачі відшукування положення лінії розділу рідин, розв'язання якої потребує пошуку розв'язків двох взаємопов'язаних підзадач: на побудову поля швидкості та динамічної сітки у конкретний момент часу і на визначення рівняння лінії розділу

шляхом розв'язання задачі конвективного перенесення відносно побудованого поля швидкості [Бомба та ін., 2013б].

З урахуванням припущення про «однаковість» рідин задачу на розрахунок динамічної сітки і поля швидкості можна вважати стаціонарною і розв'язувати її незалежно від задачі конвективного перенесення.

Процес витіснення описуємо рівнянням руху  $\mathbf{v} = k_f \cdot \text{grad } \varphi$  (закон Дарсі) та рівнянням нерозривності  $\text{div } \mathbf{v} = 0$ , де  $\mathbf{v} = v_x(x, y) + i v_y(x, y)$  — швидкість руху;  $\varphi$  — квазіпотенціал швидкості.

З метою моделювання двоякошаруватого середовища коефіцієнт фільтрації  $k_f$  визначаємо таким чином:

$$k_f = k(x(\varphi, \psi), y(\varphi, \psi)) / \mu_n,$$

де  $\mu_n$  — динамічна в'язкість нафти в пластових умовах,  $k(x(\varphi, \psi), y(\varphi, \psi))$  — коефіцієнт проникності пласта — кусково-стала функція із розривами вздовж ділянок шуканих еквіпотенціалів і ліній течії (за припущення, що виконується умова неперервності потенціалу і потоку на них):

$$k(x(\varphi, \psi), y(\varphi, \psi)) = k^{(q,l)} \quad \text{при} \quad \begin{cases} \varphi_* \leq \varphi^{(q-1)} < \varphi \leq \varphi^{(q)} \leq \varphi^*, & q = \overline{1, \bar{s}}, \\ 0 \leq \psi^{(l-1)} < \psi \leq \psi^{(l)} \leq Q, & l = \overline{1, \bar{s}}. \end{cases}$$

Тут  $k^{(q,l)}$  — деякі додатні числа;  $Q = \oint_{L_*} (v_y dx - v_x dy)$  — невідома повна фільтраційна витрата;  $\psi = \psi(x, y)$  — функція течії, комплексно спряжена до  $\varphi$  [Бомба, Гладка, 2013; Бомба та ін., 2016].

Областю фільтрації вважаємо тризв'язну криволінійну LEF-область  $G_z(z=x+iy)$ , що обмежена непроникним зовнішнім контуром  $L = \{z : f(x, y) = 0\}$  і двома внутрішніми контурами свердловин — еквіпотенціальними лініями  $L_* = \{z : f_*(x, y) = 0\}$  і  $L^* = \{z : f^*(x, y) = 0\}$ , на яких задано умови  $\varphi|_{L_*} = \varphi_*$ ,  $\varphi|_{L^*} = \varphi^*$ ,  $-\infty < \varphi_* < \varphi^* < +\infty$  (рис. 1).

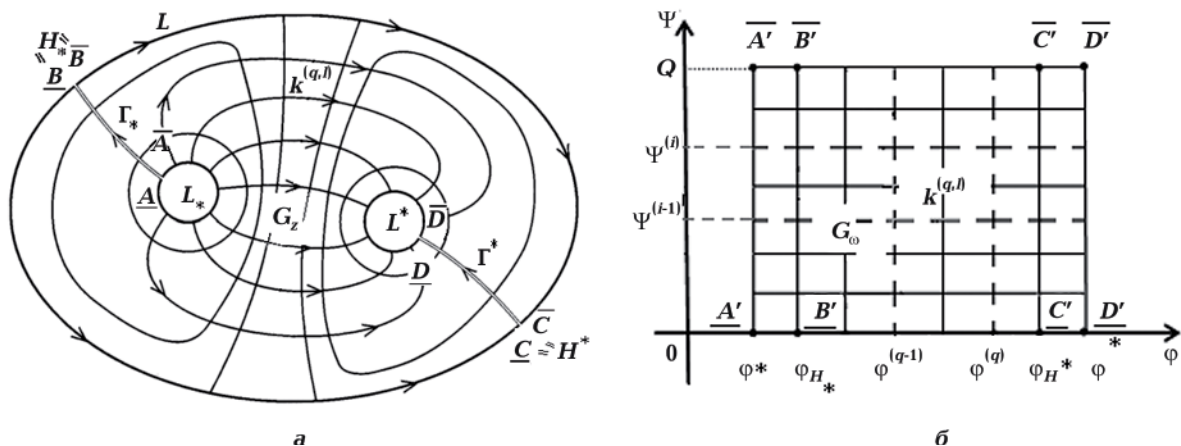


Рис. 1. Схема двоякошаруватої LEF-області (а) та відповідної їй області комплексного квазіпотенціалу (б).

За допомогою методів комплексного аналізу, аналогічно до [Бомба та ін., 2013а], фільтраційну задачу зводимо до задачі на квазіконформне («кусково-конформне») відображення заданої криволінійної LEF-області на прямокутну область комплексного квазі-

потенціалу. При цьому, як зазначено у публікаціях у [Гладка, 2016; Бомба та ін., 2014], для однозначної побудови такого відображення необхідно здійснити два умовні розрізи  $\Gamma_*$  і  $\Gamma^*$  області  $G_z$  уздовж таких ліній течії (ліній розділення течії), що однозначно визначаються точками «призупинки» потоку:  $H_* = \underline{B} = \underline{B} = (x_*, y_*) \in L$  і  $H^* = \underline{C} = \underline{C} = (x^*, y^*) \in L$ .

Задачу квазіконформного відображення  $\omega = \omega(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$  однозв'язної області  $G_z^\Gamma = G_z \setminus (\Gamma_* \cup \Gamma^*)$  на відповідну прямокутну область комплексного квазіпотенціалу

$$G_\omega = \left\{ \omega = \varphi + i\psi : \varphi_* < \varphi < \varphi^*, 0 < \psi < Q \right\} = \left( \bigcup_{q=1, l=1}^{s_1, s_2} G_\omega^{(q, l)} \right) \bigcup \left( \bigcup_{q=1}^{s_1} L_{\omega^*}^{(q)} \right) \bigcup \left( \bigcup_{l=1}^{s_2} L_{\omega 0}^{(l)} \right),$$

$$G_\omega^{(q, l)} = \left\{ \omega \in G_\omega : \varphi^{(q-1)} < \varphi < \varphi^{(q)}, \psi^{(l-1)} < \psi < \psi^{(l)} \right\},$$

$$L_{\omega^*}^{(q)} = \left\{ \omega \in G_\omega : \varphi = \varphi^{(q)} \right\}, \quad L_{\omega 0}^{(l)} = \left\{ \omega \in G_\omega : \psi = \psi^{(l)} \right\}$$

з трьома невідомими параметрами — фільтраційною витратою  $Q = \oint_{L_*} -v_y dx + v_x dy$  і координатами точок  $H_*$  та  $H^*$  — запишемо у вигляді [Бомба та ін., 2012, 2013a]

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = k_f(x, y) \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad k_f(x, y) \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (x, y) \in G_z^\Gamma; \\ \varphi|_{L_*} = \varphi_*, \quad \varphi|_{L^*} = \varphi^*, \quad \psi|_{\underline{AD}} = 0, \quad \psi|_{\overline{AD}} = \oint_{L_*} -\frac{\partial \varphi}{\partial y} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial x} dy, \\ v(x_*, y_*) = 0, \quad v(x^*, y^*) = 0, \end{cases} \quad (1)$$

де  $v(x, y) = \sqrt{v_x^2(x, y) + v_y^2(x, y)}$ .

Обернена до задачі (1) крайова задача на квазіконформне відображення  $z = z(\omega) = x(\varphi, \psi) + iy(\varphi, \psi)$  області  $G_\omega$  на  $G_z^\Gamma$  з невідомою витратою  $Q$  та умовних розрізах  $\Gamma_*$ ,  $\Gamma^*$  має вигляд

$$\begin{cases} k(x(\varphi, \psi), y(\varphi, \psi)) \frac{\partial x}{\partial \varphi} = \frac{\partial y}{\partial \psi}, \quad \frac{\partial y}{\partial \varphi} = -k(x(\varphi, \psi), y(\varphi, \psi)) \frac{\partial x}{\partial \psi}, \quad (\varphi, \psi) \in G_\omega, \\ f_*(x(\varphi_*, \psi), y(\varphi_*, \psi)) = 0, \quad f^*(x(\varphi^*, \psi), y(\varphi^*, \psi)) = 0, \quad 0 \leq \psi \leq Q, \\ f(x(\varphi, 0), y(\varphi, 0)) = 0, \quad f(x(\varphi, Q), y(\varphi, Q)) = 0, \quad \varphi_* \leq \varphi \leq \varphi^*, \\ x(\varphi, 0) = x(\varphi, Q), \quad y(\varphi, 0) = y(\varphi, Q), \quad \varphi_* < \varphi \leq \varphi_{H_*}, \quad \varphi_{H^*} \leq \varphi \leq \varphi^*, \\ v(x(\varphi_{H_*}, 0), y(\varphi_{H_*}, 0)) = 0, \quad v(x(\varphi_{H_*}, Q), y(\varphi_{H_*}, Q)) = 0, \\ v(x(\varphi_{H^*}, 0), y(\varphi_{H^*}, 0)) = 0, \quad v(x(\varphi_{H^*}, Q), y(\varphi_{H^*}, Q)) = 0, \end{cases}$$

а з урахуванням диференціальних рівнянь для дійсної  $x = x(\varphi, \psi)$  та уявної  $y = y(\varphi, \psi)$  частин характеристичної функції течії (виконання яких вимагатимемо і на розрізах для врахування їх «роздвоєння» при переході від області  $G_z$  до  $G_\omega$ ) і формул для обчислення

компонент швидкості  $v_x = \frac{k_f}{J(\varphi, \psi)} \frac{\partial y}{\partial \psi}$ ,  $v_y = -\frac{k_f}{J(\varphi, \psi)} \frac{\partial x}{\partial \psi}$  ( $J = \frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial y}{\partial \psi} - \frac{\partial x}{\partial \psi} \frac{\partial y}{\partial \varphi}$  — якобіан переходу) є еквівалентною до задачі [Бомба та ін., 2014]:

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{1}{k(x(\varphi, \psi), y(\varphi, \psi))} \frac{\partial x}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial \psi} \left( k(x(\varphi, \psi), y(\varphi, \psi)) \frac{\partial x}{\partial \psi} \right) = 0, \\ & \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{1}{k(x(\varphi, \psi), y(\varphi, \psi))} \frac{\partial y}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial \psi} \left( k(x(\varphi, \psi), y(\varphi, \psi)) \frac{\partial y}{\partial \psi} \right) = 0, (\varphi, \psi) \in G_\omega, \\ & f_*(x(\varphi_*, \psi), y(\varphi_*, \psi)) = 0, f^*(x(\varphi^*, \psi), y(\varphi^*, \psi)) = 0, 0 \leq \psi \leq Q, \\ & f(x(\varphi, 0), y(\varphi, 0)) = 0, f(x(\varphi, Q), y(\varphi, Q)) = 0, \varphi_* \leq \varphi \leq \varphi^*, \\ & x(\varphi, 0) = x(\varphi, Q), y(\varphi, 0) = y(\varphi, Q), \varphi_* < \varphi \leq \varphi_{H_*}, \varphi_{H^*} \leq \varphi \leq \varphi^*, \\ & \left( \frac{\partial x}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial f_*}{\partial y} - \frac{\partial y}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial f_*}{\partial x} \right) \Big|_{\varphi=\varphi_*} = 0, \left( \frac{\partial x}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial f^*}{\partial y} - \frac{\partial y}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial f^*}{\partial x} \right) \Big|_{\varphi=\varphi^*} = 0, \\ & \left( \frac{k(x(\varphi, \psi), y(\varphi, \psi))}{J(\varphi, \psi)} \sqrt{\frac{\partial x^2}{\partial \psi} + \frac{\partial y^2}{\partial \psi}} \right) = 0, \varphi = \varphi_{H_*}, \varphi_{H^*}, \psi = 0, Q, \\ & Q = \int_0^Q \frac{k(x(\varphi, \psi), y(\varphi, \psi))}{J(\varphi, \psi)} \left( \frac{\partial x^2}{\partial \psi} + \frac{\partial y^2}{\partial \psi} \right) d\psi, \end{aligned} \right. \quad (2)$$

де  $\varphi_{H_*}, \varphi_{H^*}$  — значення квазіпотенціалу в шуканих точках «призупинки» потоку  $H_*$  і  $H^*$  відповідно.

Умови спряження вздовж шуканих еквіпотенціальних ліній  $L_*^{(q)}$  і ліній течії  $L_0^{(l)}$ , що є лініями розриву функції  $k$ , мають вигляд

$$\left\{ \begin{aligned} & [x] \Big|_{L_*^{(q)}} = [x] \Big|_{L_0^{(l)}} = 0, [y] \Big|_{L_*^{(q)}} = [y] \Big|_{L_0^{(l)}} = 0, \\ & \left[ \kappa \frac{\partial x}{\partial \varphi} \right] \Big|_{L_*^{(q)}} = \left[ \kappa \frac{\partial x}{\partial \psi} \right] \Big|_{L_0^{(l)}} = 0, \left[ \kappa \frac{\partial y}{\partial \varphi} \right] \Big|_{L_*^{(q)}} = \left[ \kappa \frac{\partial y}{\partial \psi} \right] \Big|_{L_0^{(l)}} = 0, \end{aligned} \right. \quad (3)$$

де  $[f]$  — стрибок функції  $f$  при переході по нормалі через відповідну лінію.

**Різницьевий аналог задачі і алгоритм розв'язання.** Для знаходження розв'язків нелінійної задачі (2)—(3) в області комплексного квазіпотенціалу конструємо ортогональну сітку і замінюємо  $G_\omega$  сітковою областю:

$$\left\{ \begin{aligned} & G_\omega^\gamma = \{(\varphi_i, \psi_j) : \\ & \varphi_i = \left\{ \begin{aligned} & \varphi_* + \Delta_{\varphi 1} i, \Delta_{\varphi 1} = \frac{\varphi_{H_*} - \varphi_*}{m_1 + 1}, i = \overline{0, m_1}, \\ & \varphi_{H_*} + \Delta_{\varphi 2} (i - m_1), \Delta_{\varphi 2} = \frac{\varphi_{H^*} - \varphi_{H_*}}{m_2 - m_1 - 1}, i = \overline{m_1 + 1, m_2}, \\ & \varphi_{H^*} + \Delta_{\varphi 3} (i - m_2), \Delta_{\varphi 3} = \frac{\varphi^* - \varphi_{H^*}}{m - m_2}, i = \overline{m_2 + 1, m + 1}; \\ & \psi_j = \Delta_{\psi} j, j = \overline{0, n + 1}, \Delta_{\psi} = \frac{Q}{n + 1}, m_1, m_2, m, n \in \mathbf{N}, \end{aligned} \right. \end{aligned} \right.$$

а крайові умови, умови періодичності на розрізах і умови ортогональності ліній дина-

мічної сітки до відповідних ділянок границі фізичної області — скінченно-різницевиими аналогами [Бомба та ін., 2013а]:

$$\begin{cases} f_*(x_{0,j}, y_{0,j}) = 0, f^*(x_{m+1,j}, y_{m+1,j}) = 0, j = \overline{0, n+1}, \\ f(x_{i,0}, y_{i,0}) = 0, f(x_{i,n+1}, y_{i,n+1}) = 0, i = \overline{m_1+1, m_2}, \\ x_{i,0} = x_{i,n+1}, y_{i,0} = y_{i,n+1}, i = \overline{0, m_1}, i = \overline{m_2+1, m+1}, \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} (4x_{1,j} - 3x_{0,j} - x_{2,j})(x_{0,j+1} - x_{0,j-1}) + (4y_{1,j} - 3y_{0,j} - y_{2,j})(y_{0,j+1} - y_{0,j-1}) = 0, \\ (3x_{m,j} + x_{m-2,j} - 4x_{m-1,j})(x_{m,j+1} - x_{m,j-1}) + (3y_{m,j} + y_{m-2,j} - 4y_{m-1,j})(y_{m,j+1} - y_{m,j-1}) = 0, j = \overline{1, n}, \\ (4x_{i,1} - 3x_{i,0} - x_{i,2})(x_{i+1,0} - x_{i-1,0}) + (4y_{i,1} - 3y_{i,0} - y_{i,2})(y_{i+1,0} - y_{i-1,0}) = 0, \\ (3x_{i,n} + x_{i,n-2} - 4x_{i,n-1})(x_{i+1,n} - x_{i-1,n}) + (3y_{i,n} + y_{i,n-2} - 4y_{i,n-1})(y_{i+1,n} - y_{i-1,n}) = 0, i = \overline{m_1+1, m_2}, \end{cases} \quad (5)$$

де  $x_{i,j} = x(\varphi_i, \psi_j)$ ,  $y_{i,j} = y(\varphi_i, \psi_j)$ .

Величини квазіконформних інваріантів  $\gamma_\sigma = \frac{\Delta_{\varphi\sigma}}{\Delta_\psi}$ ,  $\sigma = \overline{1, 3}$ , одержуємо на підставі умови «квазіконформної подібності в малому» відповідних елементарних чотирикутників двох областей:

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \frac{1}{(m_1+1)(n+1)} \sum_{i,j=0}^{m_1-1,n} \frac{\gamma_{i,j}}{k_{i,j}}, \quad \gamma_2 = \frac{1}{(m_2-m_1-1)(n+1)} \sum_{i=m_1+1,j=0}^{m_2-1,n} \frac{\gamma_{i,j}}{k_{i,j}}, \\ \gamma_3 &= \frac{1}{(m-m_2)(n+1)} \sum_{i=m_2+1,j=0}^{m,n} \frac{\gamma_{i,j}}{k_{i,j}}, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\gamma_{i,j} = \frac{\sqrt{(x_{i+1,j} - x_{i,j})^2 + (y_{i+1,j} - y_{i,j})^2} + \sqrt{(x_{i+1,j+1} - x_{i,j+1})^2 + (y_{i+1,j+1} - y_{i,j+1})^2}}{\sqrt{(x_{i,j+1} - x_{i,j})^2 + (y_{i,j+1} - y_{i,j})^2} + \sqrt{(x_{i+1,j+1} - x_{i+1,j})^2 + (y_{i+1,j+1} - y_{i+1,j})^2}}, \quad k_{i,j} = k(\varphi_i, \psi_j).$$

Невідому фільтраційну витрату  $Q$  та значення квазіпотенціалу  $\varphi_{H_*}$ ,  $\varphi_{H^*}$  в точках «призупинки» потоку шукаємо в процесі ітераційних розрахунків за формулами

$$Q = \frac{(n+1)}{3} \sum_{\sigma=1}^3 \frac{\Delta_{\varphi\sigma}}{\gamma_\sigma}, \quad \varphi_{H_*} = \varphi_* + m_1 \Delta_{\varphi 1}, \quad \varphi_{H^*} = \varphi^* - m_2 \Delta_{\varphi 3}. \quad (7)$$

Формули для знаходження поля швидкостей апроксимуємо аналогічно [Бомба та ін., 2016, 2014].

У випадку кількох ліній розриву  $k$  по  $\varphi$  і по  $\psi$  для декомпозиції області використовуємо альтернувальний метод Шварца — область  $G_\omega^\gamma$  «розбиваємо» на дві групи (по горизонталі і по вертикалі) сіткових прямокутників з «накладками»:

$$\begin{aligned} G_\omega^\gamma &= \bigcup_{q=1}^{\bar{s}} \left( \bigcup_{l=1}^{\bar{s}-1} \tilde{G}_{q,l} \right) = \bigcup_{l=1}^{\bar{s}} \left( \bigcup_{q=1}^{\bar{s}-1} \tilde{\tilde{G}}_{q,l} \right), \\ \text{де } \tilde{G}_{q,l} &= \left\{ (\varphi_i, \psi_j) \in G_\omega^\gamma : \begin{aligned} &\varphi_{m^{(q-1)}+1} \leq \varphi_i \leq \varphi_{m^{(q)}-1}, \\ &\psi_{n^{(l-1)}+1} \leq \psi_j \leq \psi_{n^{(l+1)}-1} \end{aligned} \right\}, \end{aligned}$$



$$\tilde{G}_{q,l} = \left\{ (\varphi_i, \psi_j) \in G_{\omega}^{\gamma} : \begin{array}{l} \varphi_{m^{(q-1)}+1} \leq \varphi_i \leq \varphi_{m^{(q+1)}-1}, \\ \psi_{n^{(l-1)}+1} \leq \psi_j \leq \psi_{n^{(l)}-1} \end{array} \right\}.$$

Отримаємо  $\bar{s}(\bar{s}-1) + \bar{s}(\bar{s}-1)$  проєкцій вихідної задачі (стосовно підобластей  $\tilde{G}_{q,l}$ ,  $\tilde{\tilde{G}}_{q,l}$ ) для знаходження послідовностей сіткових функцій  $\left\{ \left( \tilde{x}_{i,j}^{(1,l)(\xi)}, \tilde{y}_{i,j}^{(1,l)(\xi)} \right) \right\}_{\xi=0}^{\infty}, \dots, \left\{ \left( \tilde{x}_{i,j}^{(\bar{s},l)(\xi)}, \tilde{y}_{i,j}^{(\bar{s},l)(\xi)} \right) \right\}_{\xi=0}^{\infty} \quad (l = \overline{1, \bar{s}-1})$ :

$$\begin{aligned} \tilde{x}_{i,j}^{(q,l)} &= \lim_{\xi \rightarrow \infty} \tilde{x}_{i,j}^{(q,l)(\xi)}, \quad \tilde{y}_{i,j}^{(q,l)} = \lim_{\xi \rightarrow \infty} \tilde{y}_{i,j}^{(q,l)(\xi)}, \\ \left\{ \left( \tilde{\tilde{x}}_{i,j}^{(q,1)(\delta)}, \tilde{\tilde{y}}_{i,j}^{(q,1)(\delta)} \right) \right\}_{\delta=0}^{\infty}, \dots, \left\{ \left( \tilde{\tilde{x}}_{i,j}^{(q,\bar{s})(\delta)}, \tilde{\tilde{y}}_{i,j}^{(q,\bar{s})(\delta)} \right) \right\}_{\delta=0}^{\infty} \quad (q = \overline{1, \bar{s}-1}): \\ \tilde{\tilde{x}}_{i,j}^{(q,l)} &= \lim_{\delta \rightarrow \infty} \tilde{\tilde{x}}_{i,j}^{(q,l)(\delta)}, \quad \tilde{\tilde{y}}_{i,j}^{(q,l)} = \lim_{\delta \rightarrow \infty} \tilde{\tilde{y}}_{i,j}^{(q,l)(\delta)}, \end{aligned}$$

де  $\xi, \delta$  — номери кроків ітераційних процесів методу Шварца.

Значення сіткових функцій  $\tilde{x}_{i,j}, \tilde{y}_{i,j}$  у внутрішніх вузлах прошарків  $\tilde{G}_{q,l}$  (тобто  $\tilde{x}_{i,j}^{(q,l)}, \tilde{y}_{i,j}^{(q,l)}$ ) обчислюємо методом сумарних зображень для розривних функцій [Бомба та ін., 2016, 2014; Ляшко, Великоиваненко, 1973].

Алгоритм розв'язання поставленої задачі в загальному вигляді може бути описаний таким чином. Уводимо необхідні параметри заданої фізичної області  $G_z$ , значення граничних потенціалів і функції течії та критичних потенціалів на лініях розриву  $\kappa$ , а також відповідні значення коефіцієнта провідності. Задаємо кількість вузлів розбиття сіткової області комплексного квазіпотенціалу  $G_{\omega}^{\gamma}$  так, щоб відповідні вузли належали лініям розриву  $\kappa$ , та параметри необхідної точності роботи алгоритму.

Задаємо нульове наближення невідомих величин  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  (або шуканої витрати  $Q$  і значень  $\Phi_{H_*}, \Phi_{H^*}$ ), а також початкові наближення координат граничних вузлів  $x_{0,j}, y_{0,j}, x_{m+1,j}, y_{m+1,j}, x_{i,n+1}, y_{i,n+1}, x_{i,0}, y_{i,0}$  динамічної сітки так, щоб виконувались крайові умови (4).

Обчислюємо початкові наближення координат внутрішніх вузлів як результат ітераційного процесу по  $\xi$  обчислення функцій  $\left( \tilde{x}_{i,j}^{(q,l)(\xi)}, \tilde{y}_{i,j}^{(q,l)(\xi)} \right)$  у підобластях  $\tilde{G}_{q,l}, \tilde{\tilde{G}}_{q,l}$  за формулами сумарних зображень [Бомба та ін., 2014]. При цьому значення граничних вузлів у цих підобластях визначатимемо як значення внутрішніх вузлів (уздовж відповідних вертикальних і горизонтальних відрізків) суміжних підобластей з «накладками».

Зазначимо, що достатньо провести щонайбільше  $(s_1-1)(s_2-1)$  ітерацій по  $\xi$  для отримання прийняттого результату, оскільки загальний алгоритм передбачає кількаразове повторення цих обчислювальних процедур при подальшому уточненні інших параметрів задачі. Знаходимо нові значення  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, Q$  і  $\Phi_{H_*}, \Phi_{H^*}$  за формулами (6), (7).

Після цього уточнюємо координати граничних вузлів  $x_{0,j}^{(k)}, y_{0,j}^{(k)}, x_{m+1,j}^{(k)}, y_{m+1,j}^{(k)}, x_{i,0}^{(k)}, y_{i,0}^{(k)}$  ( $k=0,1, \dots$  — номер кроку загальної ітерації) з урахуванням (4), (5) (за умови фіксації навколишніх граничних і приграничних вузлів), знаходимо нове наближення координат внутрішніх вузлів  $x_{i,j}^{(q,l)(k)}, y_{i,j}^{(q,l)(k)}$  динамічної сітки за описаною вище процедурою, знову обчислюємо  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, Q$  і  $\Phi_{H_*}, \Phi_{H^*}$ .

Наприкінці кожної загальної ітерації перевіряємо виконання умов стабілізації координат граничних вузлів. Якщо величина зміщення вузлів на границі не перевищує задані параметри точності, зупиняємо ітераційний процес, оцінюємо ступінь конформності отриманого відображення області комплексного потенціалу на фізичну область і розраховуємо матрицю швидкості.

**Розрахунок лінії розділу.** Задачу на відшукування положення лінії розділу  $\Omega_t$  (вважаємо, що у початковий момент часу:  $\Omega_{t=t_0} = L_*$ ), аналогічно до [Bomba, Yaroshchak, 2012], запишемо у вигляді

$$\begin{cases} \sigma_n \frac{\partial s}{\partial t} + \mathbf{v} \operatorname{grad} s = 0, (x, y) \in G_z^\Gamma, t > t_0, \\ s|_{L_*} = 1, s(x, y, t)|_{t=t_0} = 0, \end{cases} \quad (8)$$

де  $\sigma_n$  — пористість середовища;  $s = s(x, y, t)$  — відносна насиченість середовища витіснювальною речовиною.

Перейшовши від координат  $(x, y)$  до  $(\varphi, \psi)$  та врахувавши умови Коші—Рімана і формули для обчислення компонент швидкості, запишемо задачу (8) у вигляді

$$\begin{cases} \frac{\partial s}{\partial t} = -\frac{v^2}{\sigma_n k} \frac{\partial s}{\partial \varphi}, (\varphi, \psi) \in G_\omega, t > t_0, \\ s(x(\varphi_*, \psi), y(\varphi_*, \psi), t) = 1, 0 \leq \psi \leq Q, t > t_0, \\ s(x(\varphi, \psi), y(\varphi, \psi), t_0) = 0, \varphi_* < \varphi \leq \varphi^*, 0 \leq \psi \leq Q. \end{cases} \quad (9)$$

За формулою (9) визначаємо час, що проходить флюїд уздовж лінії течії  $\psi(x, y) = \tilde{\psi}$  від точки  $\tilde{A}_0(x(\varphi_*, \tilde{\psi}), y(\varphi_*, \tilde{\psi})) \in L_*$  до поточної точки  $\tilde{A}(x(\varphi, \tilde{\psi}), y(\varphi, \tilde{\psi}))$  ( $\varphi_* \leq \varphi \leq \varphi^*$ ) [Bomba, Yaroshchak, 2012; Бомба та ін., 2013а]:

$$t = T(\varphi, \tilde{\psi}) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\varphi_*}^{\varphi} \frac{\sigma_n k}{v^2(x(\varphi, \tilde{\psi}), y(\varphi, \tilde{\psi}))} d\varphi.$$

Відповідно, час початку та повного обводнення продукції експлуатаційної свердловини розраховуємо за формулами

$$t_{\min} = \min_{0 \leq \psi \leq Q} T(\varphi^*, \psi), \quad t_{\max} = \max_{0 \leq \psi \leq Q} T(\varphi^*, \psi).$$

**Алгоритм відшукування лінії розділу  $\Omega_t$**  будуємо аналогічно до [Bomba, Yaroshchak, 2012; Бомба та ін., 2013а, 2013б] з використанням ідеї методу характеристик. Ітераційна формула для знаходження значення квазіпотенціалу  $\tilde{\varphi}_i$  уздовж лінії течії  $\psi = \psi_j$ , що відповідає шуканому положенню межі розділу  $\Omega_t$  у відповідний момент часу, має вигляд:  $\tilde{\varphi}_i = \tilde{\varphi}_{i-1} + \Delta_t \tilde{\omega}_{i-1,j}$ , де значення коефіцієнта  $\tilde{\omega} = v^2 / \sigma_n k$  у точках, що не збігаються з вузлами динамічної сітки, обчислюємо з використанням лінійної інтерполяції за їх значеннями у навколишніх вузлах  $\tilde{\omega}_{i,j} = \omega_{i,j} + \frac{\omega_{i+1,j} - \omega_{i,j}}{\varphi_{i+1} - \varphi_i} (\tilde{\varphi}_i - \varphi_i)$ . Таким чином, для знаходження зміни за час  $\Delta_t$  положення межі розділу рідин відносно відомого попереднього порівнюємо час  $t$  з часом корекції  $t_{i,j} = t_{i-1,j} + \frac{\varphi_i - \varphi_{i-1}}{\tilde{\omega}_{i-1,j}}$  (перехід через характеристику); якщо він менший, то корегуємо положення межі розділу за знайденою ітераційною формулою для величини  $\tilde{\varphi}_i$ , інакше — збільшуємо час на крок  $\Delta_t$ .

**Результати розрахунку** динамічної сітки та положення лінії розділу рідин у різні моменти часу за наведеним алгоритмом подано на рис. 2 для області, що обмежена контуром  $L = \{x + iy : x = 10 \cos \tau + \cos 5\tau, y = 8 \sin \tau + 1, 5 \sin 3\tau, 0 \leq \tau < 2\pi\}$  і еквіпотенціалами  $L_* = \{x + iy : x = 0, 75 \cos \tau - 4, y = 0, 75 \sin \tau, 0 \leq \tau < 2\pi\}$ ,  $L^* = \{x + iy : x = 0, 75 \cos \tau + 4, y = 0, 75 \sin \tau,$



$0 \leq \tau < 2\pi$  із заданими на них граничними потенціалами  $\varphi_* = 0$ ,  $\varphi^* = 1$  відповідно у випадках: а) однорідного пласта з  $\kappa=1$ ; б) нелінійно-шаруватого пласта з

$$k = \begin{cases} 1, & \varphi \in [0; 0,2) \cup (0,3; 0,6) \cup (0,7; 1], \\ 1,2, & \varphi \in (0,2; 0,3), \\ 0,85, & \varphi \in (0,6; 0,7). \end{cases}.$$

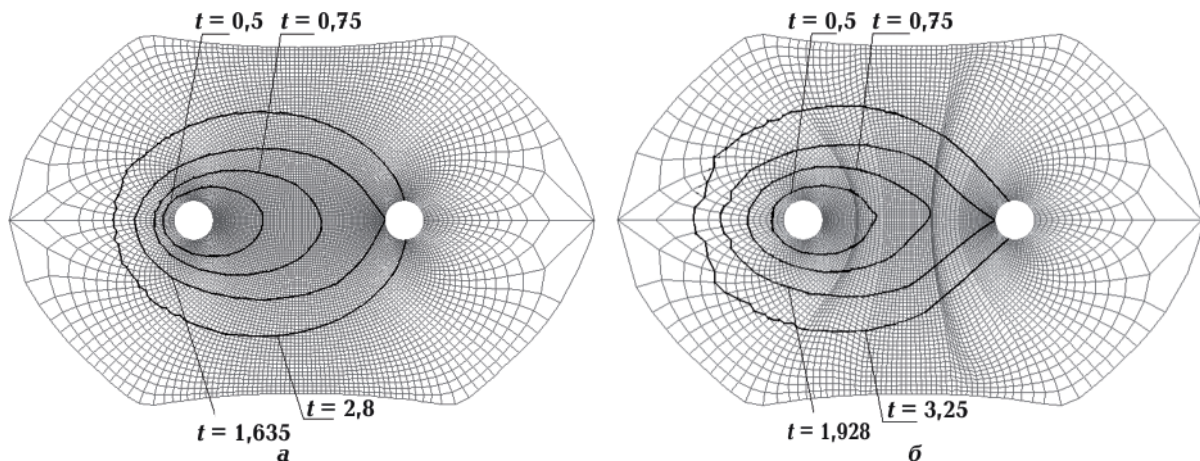


Рис. 2. Динамічні сітки та лінії розділу рідин у різні моменти часу  $t$  для однорідного (а) та нелінійно-шаруватого (б) LEF-пласта.

Як бачимо, на початковій стадії заводнення пласта поблизу нагнітальної свердловини течія є близькою до радіальної і поступово, з просуванням фронту витіснення у напрямку експлуатаційної свердловини, загострюється. Зазначимо також, що швидкість загострення фронту витіснення та його просування у напрямку експлуатаційної свердловини значно залежить від фільтраційних характеристик прилеглих до свердловин зон пласта, а тому за зміни їх пропускних властивостей (спричинених навколосвердловинними деформаціями ґрунту) певною мірою можна підвищити продуктивність розробки пласта. Отримані результати повністю корелюють з даними, наведеними у публікації [Bomba, Yaroshchak, 2012].

**Моделювання витіснення нафти водою за поршневою схемою.** На відміну від попередньої задачі, де припущення про «однаковість» рідин давало змогу, побудувавши один раз динамічну сітку і поле значень швидкості, визначати у кожний момент часу положення лінії розділу, в разі різних рідин маємо нелінійні і взаємопов'язані підзадачі: а) на знаходження розв'язку фільтраційної задачі у невідомій області; б) на відшукування положення невідомої межі розділу рідин за невідомим розв'язком фільтраційної задачі.

Розглянемо процес фільтрації двох різних рідин, які не змішуються (наприклад, води і нафти), що підпорядковується закону Дарсі у горизонтальному пласті (який розробляють нагнітальною та експлуатаційною свердловинами)  $G_z = G_z^w \cup G_z^0$ , з невідомим квазіпотенціалом швидкості  $\varphi = \varphi(x, y)$ :  $\varphi = \varphi^w$  в  $G_z^w$ ,  $\varphi = \varphi^0$  в  $G_z^0$ , що на контурах свердловин

$L_*$ ,  $L^*$  набуває значення  $\varphi|_{L_*} = \varphi_*$ ,  $\varphi|_{L^*} = \varphi^*$  і  $\frac{\partial \varphi}{\partial n}|_L = 0$  на зовнішньому контурі  $L$ . Тут  $G_z^w$  і  $G_z^0$  — підобласті фільтрації води і нафти відповідно, розділені рухомою межею  $\Omega_t$ , на якій вимагатимемо виконання умови неперервності тиску (квазіпотенціалу) і потоку. Коефіцієнт проникності відповідно води і нафти у пластових умовах  $k = k(x(\varphi, \psi), y(\varphi, \psi))$  — кусково-стала функція із розривами вздовж ділянок шуканих еквіпотенціалів і ліній течії:

$$k(x(\varphi, \psi), y(\varphi, \psi)) = \begin{cases} k_w^{(q,l)}, (x, y) \in G_z^w, \\ \varphi_* \leq \varphi^{(q-1)} < \varphi \leq \varphi^{(q)} \leq \varphi^*, q = \overline{1, s_1}, \\ 0 \leq \psi^{(l-1)} < \psi \leq \psi^{(l)} \leq Q, l = \overline{1, s_2}, \\ k_0^{(q,l)}, (x, y) \in G_z^0, \\ \varphi_* \leq \varphi^{(q-1)} < \varphi \leq \varphi^{(q)} \leq \varphi^*, q = \overline{1, s_1}, \\ 0 \leq \psi^{(l-1)} < \psi \leq \psi^{(l)} \leq Q, l = \overline{1, s_2}, \end{cases}$$

де  $k_w^{(q,l)}$ ,  $k_0^{(q,l)}$  — деякі додатні числа;  $Q$  — невідома повна фільтраційна витрата.

Використавши методи комплексного аналізу, як і в попередньому випадку, задачу фільтрації зводимо до задачі на квазіконформне відображення заданої криволінійної LEF-області із умовними розрізами  $\Gamma_*$  і  $\Gamma^*$  уздовж ліній розділення течії на область комплексного квазіпотенціалу  $G_\omega = G_\omega^w \cup G_\omega^0$  з додаванням до неї умови неперервності квазіпотенціалу і потоку при переході через рухоми межі  $\Omega_t$ . Тут  $G_z^w$ ,  $G_z^0$  — підобласті  $G_\omega$ , що відповідають  $G_z^w$ ,  $G_z^0$ .

Обернену до неї крайову задачу на квазіконформне відображення області  $G_\omega$  на  $G_z^\Gamma$  зводимо до задачі (2)—(3) з умовами на межі розділу рідин:

$$\begin{aligned} [x]_{\Omega_t} = [y]_{\Omega_t} = 0, \quad [\Xi \cos(\mathbf{v}, \mathbf{n})]_{\Omega_t} = 0, \\ \text{де } \Xi(\varphi, \psi) = \frac{k_f}{J(\varphi, \psi)} \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \psi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \psi}\right)^2}. \end{aligned}$$

Для знаходження положення межі розділу рідин й побудови динамічної сітки і поля швидкості у момент часу  $t_0 \leq t \leq T$  використано таку процедуру їх ітераційного наближення. За заданим початковим положенням межі розділу рідин  $\Omega_{t_0}$  знаходимо розв'язок фільтраційної задачі за наведеним вище алгоритмом. Положення  $\Omega_t$  ( $\tilde{x}_{k,j} = x(\tilde{\varphi}_k, \psi_j)$ ,  $\tilde{y}_{k,j} = y(\tilde{\varphi}_k, \psi_j)$ ) у кожний наступний момент часу  $t_k = t_{k-1} + \Delta t$ ,  $k=1, 2, \dots$  шукаємо, використовуючи поле значень швидкості при  $t=t_{k-1}$ , відповідні значення вузлів динамічної сітки  $x_{i,j} = x(\varphi_i, \psi_j)$ ,  $y_{i,j} = y(\varphi_i, \psi_j)$ , формулу для розрахунку часу  $t_{i,j} = T(\varphi_i, \psi_j)$  проходження частиною рідини шляху від початкової точки (наприклад, на межі нагнітальної свердловини) до поточної вздовж вибраної лінії течії. Відповідне  $t_k$  значення квазіпотенціалу  $\tilde{\varphi}_k$  уздовж ліній течії  $\psi = \psi_j$  ( $j = \overline{1, n}$ ) визначаємо, наприклад, із пропорції [44]:  $\frac{\varphi_{i+1} - \varphi_i}{t_{i+1,j} - t_{i,j}} = \frac{\varphi_{i+1} - \tilde{\varphi}_k}{t_{i+1,j} - t_k}$ , де значення  $i$  беремо таке, за якого  $t_{i,j} < t_k < t_{i+1,j}$ . Після знаходження нового положення лінії розділу рідин знову «перераховуємо» фільтраційну задачу.

**Моделювання сумісного руху рідин за схемою Баклея—Леверетта.** Розглянемо процеси двофазної фільтрації, за яких утворюється достатньо велика зона, де рухаються обидві рідини. Ці процеси описуємо рівняннями руху (узагальненими законами Дарсі) та рівняннями нерозривності течії для кожної з рідин [Bomba, Yaroshchak, 2012]:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_0 = \frac{\bar{k}k_0}{\mu_0} \text{grad } \varphi, \quad \sigma_n \frac{\partial(1-s)}{\partial t} + \text{div } \mathbf{v}_0 = 0, \\ \mathbf{v}_w = \frac{\bar{k}k_w}{\mu_w} \text{grad } \varphi, \quad \sigma_n \frac{\partial s}{\partial t} + \text{div } \mathbf{v}_w = 0, \end{aligned}$$

де  $s=s(x, y, t)$  — насиченість витіснювальної фази;  $\sigma_n$ ,  $\bar{k}$  — коефіцієнти пористості та абсолютної проникності;  $\mathbf{v}_0$ ,  $\mathbf{v}_w$ ,  $\mu_0$ ,  $\mu_w$  — вектори швидкості та коефіцієнти в'язкості

відповідних фаз,  $\tilde{k}_0 = \tilde{k}_0(s)$ ,  $\tilde{k}_w = \tilde{k}_w(s)$  — відносні фазові проникності нафти і води відповідно.

Позначивши

$$k = k(s) = \frac{\tilde{k}\tilde{k}_0(s)}{\mu_0} + \frac{\tilde{k}\tilde{k}_w(s)}{\mu_w},$$

$$f(s) = \frac{\mu_0\tilde{k}_w(s)}{\mu_w\tilde{k}_0(s) + \mu_0\tilde{k}_w(s)},$$

для сумарної швидкості  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_w$  з урахуванням початкових і крайових умов маємо

$$\begin{cases} \operatorname{div}(k \operatorname{grad} \varphi) = 0, (x, y) \in G_z, \quad t_0 \leq t \leq T, \\ \varphi|_{L_*} = \varphi_*, k_{L^*} = \varphi^*, \frac{\partial \varphi}{\partial n}|_L = 0, \\ \sigma_n \frac{\partial s}{\partial t} + v_x \frac{\partial f}{\partial x} + v_y \frac{\partial f}{\partial y} = 0, (x, y) \in G_z, \quad t_0 \leq t \leq T, \\ s|_{L_*} = s_*, \quad s|_{t=t_0} = \tilde{s}(x, y), \end{cases}$$

де  $\tilde{s}(x, y)$  — задана функція розподілу насиченості у початковий момент часу.

Аналогічно до попереднього, увівши функцію течії  $\psi = \psi(x, y)$ , комплексно спряжену до  $\varphi$ , та здійснивши умовні розрізи  $\Gamma_*$  і  $\Gamma^*$  області  $G_z$  уздовж ліній розділу течії, що визначаються шуканими точками «призупинки» потоку  $H_*(x_*, y_*)$  і  $H^*(x^*, y^*)$ , задачу на побудову динамічної сітки, відшукування повної витрати та інших характерних фільтраційних параметрів зводимо до задачі на квазіконформне відображення  $\omega = \omega(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$  утвореної однозв'язної області  $G_z^\Gamma = G_z \setminus (\Gamma_* \cup \Gamma^*)$  на відповідну прямокутну область комплексного квазіпотенціалу

$$G_\omega = \left\{ \omega = \varphi + i\psi : \varphi_* < \varphi < \varphi^*, 0 < \psi < Q \right\} = \left( \bigcup_{q=1, l=1}^{\bar{s}, \bar{s}} G_\omega^{(q, l)} \right) \cup \left( \bigcup_{q=1}^{\bar{s}} L_\omega^{(q)*} \right) \cup \left( \bigcup_{l=1}^{\bar{s}} L_\omega^{(l)} \right)$$

з невідомим параметром  $Q$ :

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = k(s(x, y, t)) \frac{\partial \psi}{\partial y}, k(s(x, y, t)) \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, (x, y) \in G_z^\Gamma, t_0 \leq t \leq T, \\ \varphi|_{L_*} = \varphi_*, \quad \varphi|_{L^*} = \varphi^*, \psi|_{AD} = 0, \quad \psi|_{\overline{AD}} = \oint_{L_*} -k(s) \frac{\partial \varphi}{\partial y} dx + k(s) \frac{\partial \varphi}{\partial x} dy, \\ v(x_*, y_*) = 0, \quad v(x^*, y^*) = 0, \frac{\partial s}{\partial t} = -\frac{k(s)}{\sigma_n} \frac{\partial f(s)}{\partial s} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial s}{\partial y} \right), s|_{L_*} = s_*, \quad s|_{t=t_0} = \tilde{s}(x, y). \end{cases} \quad (10)$$

Обернену до задачі (10) крайову задачу на квазіконформне відображення  $z = z(\omega) = x(\varphi, \psi) + iy(\varphi, \psi)$  області  $G_\omega$  на  $G_z^\Gamma$  при невідомій витраті  $Q$  та умовних розрізах  $\Gamma_*$ ,  $\Gamma^*$  записуємо у вигляді (2)—(3) із «доповненням» її задачею для насиченості:

$$\begin{cases} \frac{\partial s}{\partial t} = -\frac{v^2}{\sigma_n k} \frac{\partial f}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial \varphi}, \quad (\varphi, \psi) \in G_\omega, \quad t > t_0, \\ s(x(\varphi_*, \psi), y(\varphi_*, \psi), t) = s_*, \quad 0 \leq \psi \leq Q, \quad t > t_0, \quad s(x(\varphi, \psi), y(\varphi, \psi), t_0) = \tilde{s}(x(\varphi, \psi), y(\varphi, \psi)), \\ \varphi_* < \varphi \leq \varphi^*, \quad 0 \leq \psi \leq Q. \end{cases} \quad (11)$$

Тут дуже важливим є той факт, як зазначено у статті [Bomba, Yaroshchak, 2012], що рівняння задачі (11) є фактично просторово одновимірним, тому що змінну  $\psi$  можна вважати параметром. Це дає змогу суттєво спростити загальний підхід до розв'язання вихідної задачі, а саме — розщепити алгоритм на послідовність простіших підзадач: крайових задач на квазіконформні відображення (за відомим з попереднього часового кроку розподілом насиченості  $s=s(x, y, t)$  розв'язуємо фільтраційну задачу (2)—(3)) та нелінійних задач для просторово одновимірних диференціальних рівнянь у частинних похідних першого порядку з параметром (отримавши розв'язок (2)—(3) відносно квазіпотенціалу швидкості та маючи відомий з попереднього часового кроку розподіл насиченості, знаходимо розв'язок задачі насиченості (11)).

**Висновки.** Запропоновано методику математичного моделювання нелінійних процесів витіснення (фільтрації) у зонально-неоднорідних пористих LEF-пластах, геометрія зон яких наперед невідома і визначається з урахуванням зворотного впливу потенціалу поля швидкості та функції течії на провідність середовища. Здійснено постановку нелінійних крайових задач, в яких коефіцієнт провідності середовища залежить від потенціалу поля (напору, тиску) і від функції течії, для трив'язних криволінійних LEF-областей, що моделюють взаємодію нагнітальної та експлуатаційної свердловин в елементі нафтового продуктивного пласта. Розроблено обчислювальну технологію розв'язання таких задач на основі синтезу числових методів квазіконформних відображень, сумарних зображень для диференціальних рівнянь з розривними коефіцієнтами і декомпозиції області із застосуванням альтернуального методу Шварца. Побудовані алгоритми забезпечують можливість автоматичного розрахунку динамічної сітки руху речовин, знаходження ліній розділу речовин і шарів сталості коефіцієнта провідності середовища, обчислення повної фільтраційної витрати тощо.

Розроблені на основі LEF-пластів математичні моделі і методи розв'язання нелінійних крайових задач застосовано до комп'ютерного моделювання нелінійних фільтраційних процесів у нафтових пластах за умов взаємовпливу параметрів процесу і середовища. Цей підхід може бути основою для числового визначення (ідентифікації) параметрів процесу [Bomba, Hladka, 2014, 2017].

### Список літератури

- Бомба А. Я., Булавацький В. М., Скопечкий В. В. Нелінійні математичні моделі процесів геогідродиніки. Київ: Наук. думка, 2007. 308 с.
- Бомба А. Я., Гладка О. М. Математичне моделювання нелінійних фільтраційних процесів у сланцевих пластах. *Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології*. 2013. № 18. С. 32—42.
- Бомба А. Я., Гладка О. М., Кузьменко А. П. Обчислювальні технології на основі методів комплексного аналізу та сумарних зображень. Рівне: Ассоль, 2016. 283 с.
- Бомба А. Я., Гладка О. М., Кузьменко А. П. Методи комплексного аналізу і сумарних зображень моделювання нелінійних процесів витіснення для системи двох свердловин у двоякошаруватому нафтогазовому пласті. *Вісник Тернопільського нац. техн. ун-ту*. 2014. Вип. 1(73). С. 238—251.
- Бомба А. Я., Каштан С. С., Пригорницький Д. О., Ярошак С. В. Методи комплексного аналізу. Рівне: НУВГП, 2013а. 415 с.
- Бомба А. Я., Кузьменко А. П., Гладка О. М. Синтез числових методів конформних відображень та сумарних зображень при моделюванні ідеальних полів для криволінійних областей. *Вісник Київського нац. ун-ту ім. Т. Шевченка. Серія: фіз.-мат. науки*. 2012. № 2. С. 87—94.

- Бомба А. Я., Ярошак С. В., Синчук А. М. Метод комплексного анализа исследования двухфазной фильтрации в горизонтальных пластах с учетом гидроразрыва. *Электронное моделирование*. 20136. № 2(35). С. 25—33.
- Василевский Ю. В., Ольшанский М. А. Краткий курс по многосеточным методам и методам декомпозиции области. Москва: Изд-во Моск. ун-та, 2007. 105 с.
- Гладка О. М. Системний підхід до математичного моделювання фільтраційних процесів у багатозв'язних криволінійних LEF-пластах. *Системні дослідження та інформаційні технології*. 2016. № 2. С. 58—73. <http://dx.doi.org/10.20535/SRIT.2308-8893.2016.2.06>.
- Ляшко И. И., Великоиваненко И. М. Численно-аналитическое решение краевых задач теории фильтрации. Киев: Наук. думка, 1973. 264 с.
- Сергиенко И. В., Скопецкий В. В., Дейнека В. С. Математическое моделирование и исследование процессов в неоднородных средах. Киев: Наук. думка, 1991. 432 с.
- Bomba, A. Ya., & Hladka, O. M. (2017). Problems of identification of the parameters of quasiideal filtration processes in nonlinear layered porous media. *Journal of Mathematical Sciences*, 220(2), 213—225. doi: 10.1007/s10958-016-3178-2.
- Bomba, A. Ya., & Hladka, E. N. (2014). Methods of complex analysis of parameters identification of quasiideal processes in nonlinear doubly-layered porous pools. *Journal of Automation and Information Sciences*, 46(11), 50—62. doi: 10.1615/JAutomatInfScien.v46.i11.60.
- Bomba, A. Ya., & Yaroshchak, S. V. (2012). Complex approach to modeling of two-phase filtration processes under control conditions. *Journal of Mathematical Sciences*, 184(1), 56—68.
- Bomba, A. Ya., Yaroshchak, S. V., & Myslyuk, M. A. (2013). Mathematic modelling of thermodynamic effects in a gas formation well bore zone. *Journal of Hydrocarbon Power Engineering*, (1), 1—4.
- Hladka, O., & Bomba, A. (2014). The complex analysis method of numerical identification of parameters of quasiideals processes in doubly-connected nonlinear-layered curvilinear domains. *Journal of Mathematics and System Science*, 4(7), 514—521. doi: 10.17265/2159-5291/2014.07.009.
- Polozhii, G. N. (1965). *The method of summary representations for numerical solution of problems of mathematical physics*. London: Pergamon Press, 283 p.

## Mathematical modeling of nonlinear displacement processes in oil LEF-layer by methods of complex analysis and summary representations

*O. M. Hladka, 2019*

The approach to the modeling of nonlinear displacement processes (one and two-phase filtration) in heterogeneous oil deformable layers is developed, taking into account the inverse effect of the potential of the velocity field and the flow function on the conductivity of the medium. We constructed a method and computational technology for solving the corresponding boundary value problems for nonlinear-layered triple-connected curvilinear domains, bounded by equipotential lines and flow lines, on the basis of the synthesis of numerical methods of quasiconformal mappings and summary representations for differential equations with discontinuous coefficients in combination with domain decomposition by Schwartz method. Quasi-ideal processes in nonlinearly double-layered horizontal LEF-layers, whose geometry of heterogeneity zones is unknown in advance, is described by the corresponding boundary value problems obtained on the basis of the



Darcy law and the continuity equation with the coefficient of layer permeability, which is given by a piecewise-constant function with ruptures along the searched equipotentials and lines of flow. The coefficient of conductivity the medium is given as a piecewise-constant function, that is dependent on the searched quasipotential and function of flow, with unknown line dividing layers (lines gap conductance coefficient) that is along the searched equipotential lines and flow lines and that is finding in the process of solving the problem. The proposed algorithms automatically solve the problem of choice of nodes and building a dynamic grid, finding of the unknown dividing lines of areas constancy coefficient of conductivity the medium, the calculation of the velocity field and calculate other characteristic parameters of the process. The decomposition of the domain on the layers of the constancy of permeability coefficient allows us to solve problems in more «comfortable» subdomain than the original problem the whole domain, and allows make in parallel the computational process, since calculations in the subdomain at each iterative step are independent of each other and can be done in parallel with the use of modern computer technology.

**Key words:** reservoir of oil, doubly-layered medium, quasiconformal mappings, complex quasipotential, summary representations method, domain decomposition, alternating method by Schwarz, LEF-layer.

### References

- Bomba, A. Ya., Bulavatsky, V. M., Skopetsky, V. V. (2007). *Nonlinear mathematical models of processes of heohydrodynamics*. Kyiv: Naukova Dumka, 308 p. (in Ukrainian).
- Bomba, A. Ya., & Hladka, O. M. (2013). Mathematical modelling of nonlinear filtration processes in shale layers. *Fizyko-matematychne modelyuvannya ta informatsiyi tekhnolohiyi*, (18), 32—42 (in Ukrainian).
- Bomba, A. Ya., Hladka, O. M., & Kuzmenko, A. P. (2016). *Computational technologies based on the methods of complex analysis and summary representations*. Rivne: Assol, 283 p. (in Ukrainian).
- Bomba, A. Ya., Hladka, O. M., & Kuzmenko, A. P. (2014). Methods of complex analysis and summary representations modeling nonlinear processes displacement for the system of two wells in doubly-layered reservoir of oil and gas. *Visnyk Ternopilskoho natsionalnoho tekhnichnoho universytetu*, (1), 238—251 (in Ukrainian).
- Bomba, A. Ya., Kashtan, S. S., Pryhornytsky, D. O., & Yaroshchak, S. V. (2013a). *Methods of complex analysis*. Rivne: Publ. of the National University of Water Management and Nature Management, 415 p. (in Ukrainian).
- Bomba, A. Ya., Kuzmenko, A. P., & Hladka, O. M. (2012). The syntheses of the numeric methods conformal mappings and summary representations in modeling by ideal fields for curvilinear domains. *Visnyk Kyivskoho natsionalnoho universytetu imeni Tarasa Shevchenka. Seriya "Fizyko-matematychni nauky"*, (2), 87—94 (in Ukrainian).
- Bomba, A. Ya., Yaroshchak, S. V. & Sinchuk, A. M. (2013b). The method of complex analysis of the study of two-phase filtration in horizontal layers, taking into account hydraulic fracturing, *Elektronnoye modelirovaniye*, (2), 25—33 (in Russian).
- Vasilevskiy, Yu. V., & Olshanskiy, M. A. (2007). *Short course on multigrid methods and domain decomposition methods*. Moscow: Moscow University Press, 105 p. (in Russian).
- Hladka, O. M. (2016). Systematic approach to mathematical modeling of filtration processes in multiply-connected curvilinear LEF-layers. *Systemni doslidzhennya ta informatsiyi tekhnolohiyi*, (2), 58—73. <http://dx.doi.org/10.20535/SRIT.2308-8893.2016.2.06> (in Ukrainian).
- Lyashko, I. I., & Velikoivanenko, I. M. (1973). *Numerical-analytical solution of boundary value problems of filtration theory*. Kiev: Naukova Dumka, 264 p. (in Russian)



- Sergienko, I. V., Skopetskiy, V. V., & Deyneka, V. S. (1991). *Mathematical modeling and research of processes in heterogeneous media*. Kiev: Naukova Dumka, 432 p. (in Russian).
- Bomba, A. Ya., & Hladka, O. M. (2017). Problems of identification of the parameters of quasiideal filtration processes in nonlinear layered porous media. *Journal of Mathematical Sciences*, 220(2), 213—225. doi: 10.1007/s10958-016-3178-2.
- Bomba, A. Ya., & Hladka, E. N. (2014). Methods of complex analysis of parameters identification of quasiideal processes in nonlinear doubly-layered porous pools. *Journal of Automation and Information Sciences*, 46(11), 50—62. doi: 10.1615/JAutomatInfScien.v46.i11.60.
- Bomba, A. Ya., & Yaroshchak, S. V. (2012). Complex approach to modeling of two-phase filtration processes under control conditions. *Journal of Mathematical Sciences*, 184(1), 56—68.
- Bomba, A. Ya., Yaroshchak, S. V., & Myslyuk, M. A. (2013). Mathematic modelling of thermodynamic effects in a gas formation well bore zone. *Journal of Hydrocarbon Power Engineering*, (1), 1—4.
- Hladka, O., & Bomba, A. (2014). The complex analysis method of numerical identification of parameters of quasiideals processes in doubly-connected nonlinear-layered curvilinear domains. *Journal of Mathematics and System Science*, 4(7), 514—521. doi: 10.17265/2159-5291/2014.07.009.
- Polozhii, G. N. (1965). *The method of summary representations for numerical solution of problems of mathematical physics*. London: Pergamon Press, 283 p.